Groupe A

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Le but du problème est d'étudier le comportement, quand n tend vers l'infini, des suites $(v_n)_{n \geqslant 0}$ de nombres complexes vérifiant, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{3} v_{n-1} + \frac{2}{3} v_{n+1} - q_n v_n = \lambda v_n$$

où λ est un nombre complexe, et où $(q_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite donnée de nombres complexes qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

I

1° Soient $(c_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de nombres réels positifs ou nuls, et M un nombre réel positif. Soit $(a_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de nombres réels positifs ou nuls telle que pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$a_{n+1} \leqslant M + \sum_{k=0}^{n} c_k a_k$$

a. On suppose que la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ est convergente. Montrer que la suite $(a_n)_{n \geqslant 0}$ est bornée.

Tournez la page S. V. P.

b. On suppose que $c_0 = 0$, et que, pour $n \geqslant 1$, $c_n = \frac{1}{n}$. Montrer qu'il existe un nombre réel positif K tel que, pour tout entier $n \geqslant 1$

$$a_n \leqslant K n$$

2° Soit $(c_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de nombres réels positifs ou nuls. On suppose que la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ est convergente. Soit $(a_n)_{n \geqslant 0}$ une suite bornée de nombres réels positifs ou nuls telle que, pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$a_n \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} c_k a_k$$

Montrer qu'il existe un entier positif N tel que, pour tout entier $n \geqslant N$, $a_n = 0$.

II

Pour tout nombre complexe λ on note E_λ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des suites $(u_n)_{n \geqslant 0}$ de nombres complexes qui vérifient, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\frac{1}{3} u_{n-1} + \frac{2}{3} u_{n+1} = \lambda u_n$$

1° Déterminer l'ensemble Ω des nombres complexes λ pour lesquels toute suite de E_λ est bornée. On montrera que l'ensemble Ω peut être défini de la façon suivante :

$$\Omega = \{\lambda = \mu + i\nu \mid \mu, \nu \in \mathbb{R}, A\mu^2 + B\mu\nu + C\nu^2 \leqslant 1\}$$

où A, B, C sont trois nombres réels que l'on déterminera.

2° Soit $(b_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de nombres complexes, et soit $(w_n)_{n \geqslant 0}$ la suite de nombres complexes définie par :

$$w_0 = 0, \ w_1 = 0$$

et pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\frac{1}{3} w_{n-1} + \frac{2}{3} w_{n+1} - \lambda w_n = b_n$$

16 ENS ULM SEVRES 81

a. On suppose que le nombre complexe λ appartient à l'ensemble Ω et que la série $\sum_{n=1}^{\infty} | b_n |$ est convergente. Montrer que la suite $(w_n)_{n>0}$ est bornée.

(On pourra utiliser la suite $(d_n)_{n>1}$ définie par :

$$\frac{3z}{z^2 - 3\lambda z + 2} = \sum_{n=1}^{\infty} d_n z^n$$

pour tout nombre complexe z tel que $| z | < 1$)

b. On suppose que λ est un nombre réel vérifiant

$$-\frac{2\sqrt{2}}{3} \leqslant \lambda \leqslant \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

et que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ est strictement supérieur à $\sqrt{2}$. Montrer qu'il existe une suite unique $(u_n)_{n>0}$ appartenant à E_λ telle que

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{2})^n (w_n - u_n) = 0$$

III

Soit $(q_n)_{n>1}$ une suite de nombres complexes. Pour tout nombre complexe λ on note F_λ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des suites $(v_n)_{n>0}$ de nombres complexes qui vérifient, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\frac{1}{3} v_{n-1} + \frac{2}{3} v_{n+1} - q_n v_n = \lambda v_n$$

1° On suppose que la série $\sum_{n=1}^{\infty} | q_n |$ est convergente, et que le nombre complexe λ appartient à l'ensemble Ω défini en II.1°. Montrer que toute suite de F_λ est bornée.

(On utilisera le résultat démontré en I.1° *a.*)

Tournez la page S. V. P.

2° Jusqu'à la fin du problème on suppose que λ est un nombre réel vérifiant :

$$-\frac{2\sqrt{2}}{3} \leqslant \lambda \leqslant \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

et que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} q_n z^n$ est strictement supérieur à $\sqrt{2}$.

a. Montrer que pour toute suite $(v_n)_{n>0}$ de l'espace F_λ il existe une suite unique $(u_n)_{n>0}$ de l'espace E_λ telle que :

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{2})^n (v_n - u_n) = 0$$

On définit ainsi une application T de l'espace F_λ dans l'espace E_λ.

b. Quelles sont les suites $(v_n)_{n>0}$ de l'espace F_λ telles que :

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{2})^n v_n = 0$$

(On pourra montrer que si $(v_n)_{n>0}$ est une telle suite, la suite $(a_n)_{n>0}$ définie par $a_n = (\sqrt{2})^n | v_n |$ vérifie une inégalité du type :

$$a_n \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} c_k a_k$$

où les nombres c_k sont des réels positifs ou nuls tels que la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ soit convergente.)

c. L'application T définie en III.2° *a.* de l'espace F_λ dans l'espace E_λ est-elle un isomorphisme?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail